

30/10/2018

## # 4<sup>ο</sup> ΜΑΘΗΜΑ #

### ■ ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

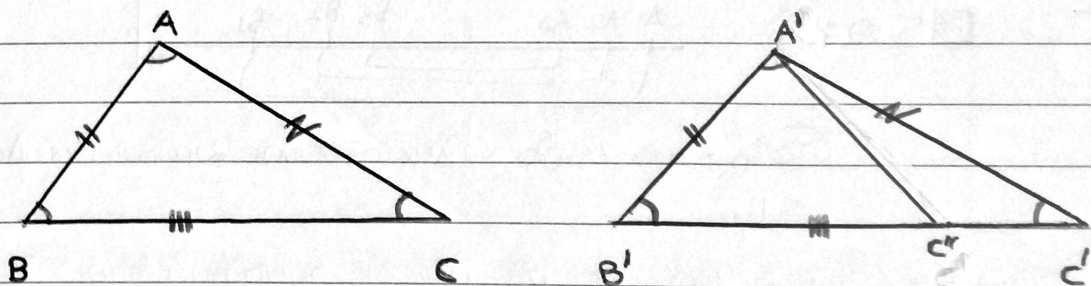
● Μια γεωμετρία, η οποία περιέχει τα αξιώματα Δεσφ, Διάταξης, Ισότητας και, συνέχεια λέγεται απόλυτος γεωμετρία ή ουδέτερη. ΔΕΝ υποδέχεται την αλήθεια του αξιώματος της παραλληλίας.

### # ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ #

■ ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο τρίγωνα λέγονται ΙΣΑ αν-ν, έχω τις πλευρές και, τις γωνίες ίσες μία προς μία.

■ ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν δύο τρίγωνα έχω δύο πλευρές ίσες και, τις αντιστοίχες περιεχόμενες γωνίες ίσες  $\Rightarrow$  Τα τρίγωνα είναι ίσα.

[ΑΠΟΔΕΞΗ]:



$$\begin{array}{l} \text{● Έστω, } AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \end{array}} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'} \\ \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \end{array} \quad \text{⊙}$$

● Αρκεί, ν.δ.ο  $BC = B'C'$

● Έστω,  $BC < B'C' \Rightarrow \exists$  σημείο  $c''$ , ανάμεσα στο  $B'C'$ :  $BC = B'C''$

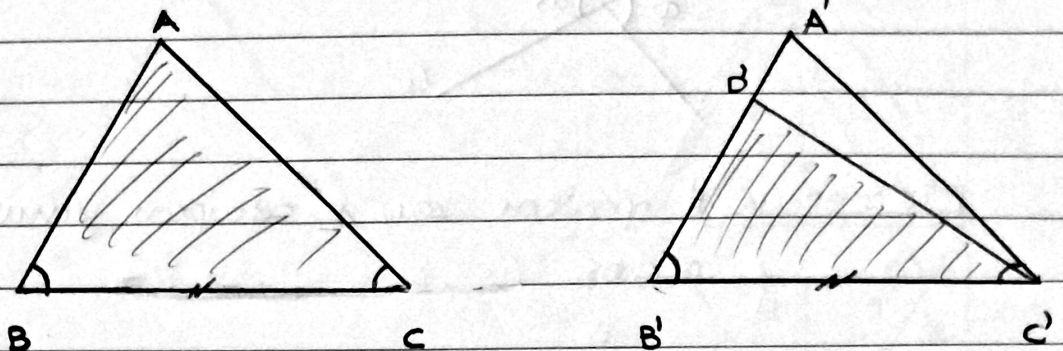
● Από (\*):  $\widehat{BAC} = \widehat{c''A'B'}$  [ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ:  $ABC, A'C''B'$ ]

3 Απο, από αξίωμα Ισότητας

\* Αρα,  $BC = B'C'$

**ΠΡΟΤΑΣΗ:** Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες σ'αυτή γωνίες ίσες  $\Rightarrow$  Τα τρίγωνα είναι ΙΣΑ

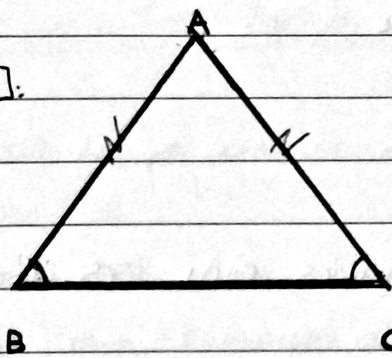
[ΑΠΟΔΕΞΗ]:



- Αρκεί, ν.δ.ο  $AB = A'B'$
- Έστω,  $AB < A'B' \Rightarrow \exists$  μετὰ τοῦ  $AB$  σημεῖο  $D' : AB = B'D'$
- ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ  $\hat{A}BC$  ΚΑΙ  $B'D'C' \Rightarrow$  ΙΣΑ (πλευρὰ-γωνία-πλευρὰ)
- Διὰ. προκύπτει ὅτι:  $D'C'B' = B'A'C' \cong$  ἄρα.

**ΠΡΟΤΑΣΗ:** Σε κάθε, ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες των βραχίων γωνίες είναι ίσες [Ισχύει, και, το αντίστροφο].

[ΑΠΟΔΕΞΗ]:



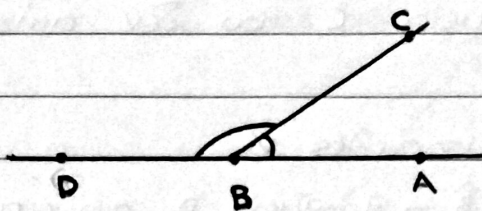
$\hat{A} = \hat{A}$   
 $AB = AC$   
 $AC = AB$

Μαίρω, τα  $\hat{A}BC$  και  $\hat{A}CB$

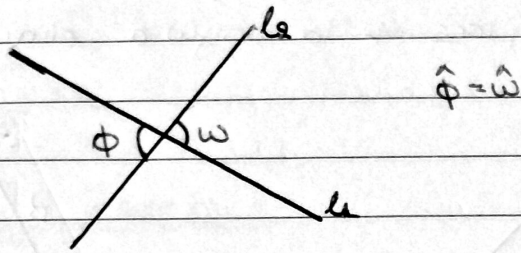
Άρα, συνέπεια της προηγούμενης

πρότασης.

**ΠΡΟΣΤΑΣΗ:** Έστω,  $ABC$  μια γωνία και  $D$  ένα σημείο τέτοιο ώστε  $D * B * A \Rightarrow$  Οι γωνίες  $\hat{A}BC$  και  $\hat{C}BD$  : παραπληρωματικές



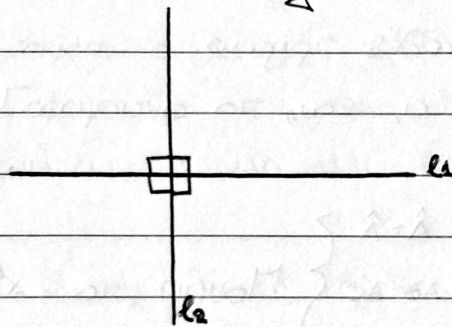
**ΠΡΟΤΑΣΗ:** Οι κατακόρυφες γωνίες είναι ίσες



**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Η πρόσδεση και η σφαίρεση γωνιών είναι κατά ορισμένες.

**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Μια γωνία λέγεται ορθή αν είναι ίση με των παραπληρωματικών της.

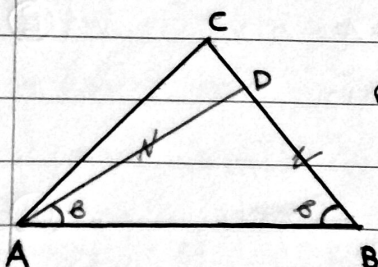
**ΟΡΙΣΜΟΣ:** Δύο ευθείες λέγονται κάθετες αν τέμνονται σε σημείο που σχηματίζονται ορθές γωνίες.



**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Δύο τυχαίες ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

**ΠΡΟΤΑΣΗ:** Για έναν ευθύγραμμο άξονα AB, υπάρχει ισοσκελές τρίγωνο με βάση AB.

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]: Από (9.3)  $\exists$  σημείο C που δεν ανήκει στο AB



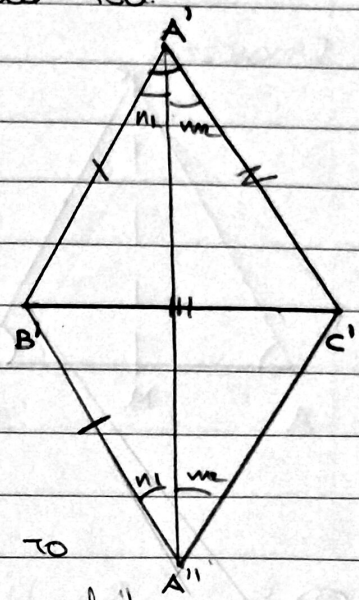
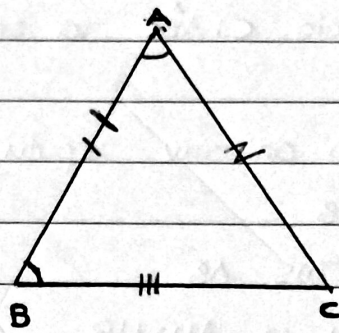
● Αν  $\triangle ABC$ : ισοσκελές  $\checkmark$

● Αν  $\hat{A} > \hat{B} \Rightarrow \exists$  σημείο D αλληλοκάτοικο στο B και C :

$\hat{B}\hat{A}D = \hat{A}\hat{B}D \Rightarrow \triangle ABD$ : ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ

**Πορίσμα:** Εάν, δύο τρίγωνα  $ABC$  και  $A'B'C'$  έχουν τις πλευρές ίσες μία προς μία  $\Rightarrow$  Τα τρίγωνα είναι ίσα.

[Απόδειξη]:



$$\hat{C}'B'A'' = \hat{A}BC$$

$$B'A'' = AB$$

$$BC = B'C'$$

Φέρω, ότι:  $A'B' = B'A''$

Φέρω, το ευθύγραμμο τρίγωνο

για τα  $A'C' = A''C''$

και, έχω δύο ισοσκελή τρίγωνα.

$A'B'C'$  και  $B'C'$ : κοινή

$B'A''C'$

Άλλα χρήσιμα αποτελέσματα

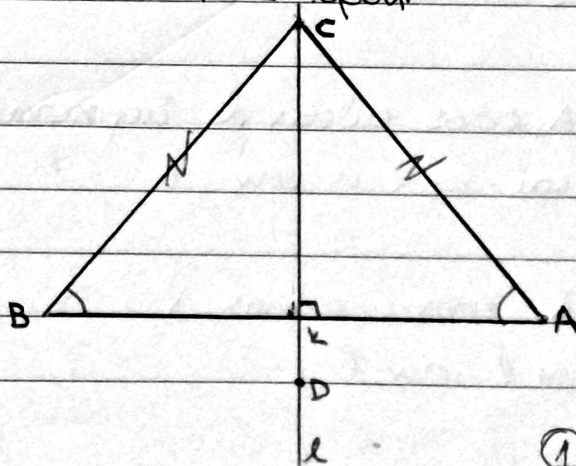
① Από σημείο  $A$  εκτός ευθείας  $l$  διέρχεται ευθεία  $n$  οποία κούβει προς την  $l$ .

[Απόδειξη]: Έστω,  $C$ : σημείο αν ευθεία  $l$ .

Θεωρώ, σημείο  $B$  στο ημισπίνοδο του  $l$  που δεν περιέχει το  $A$ :  $\hat{D}CA = \hat{D}CB$

Φέρω,  $BC = CA \Rightarrow \triangle ABC$ : Ισοσκελές  $\Rightarrow \hat{B} = \hat{A}$

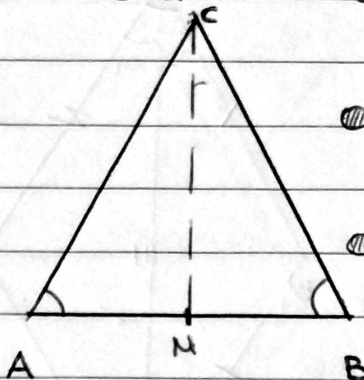
Φέρω,  $CKB = CKA \Rightarrow \hat{K}$ : ορθή.



①

2) Κάθε ευθύγραμμο τρίγωνο έχει ένα ύψος.

[Απόδειξη]:



● Δεχτώ, ορθογώνιο τρίγωνο  $C: \triangle ABC$  να είναι ισοσκελές με  $AC = CB$

● Από το 1) αν' των κορυφών  $C$ , ρίξεται κάθετος προς το  $AB$

●  $M$ : Τομή της  $AB$

●  $\angle ACM = \angle BCM \Rightarrow AM = MB$

3) Ένα ευθύγραμμο τρίγωνο έχει ένα ορθογώνιο τρίγωνο

4) Σε κάθε τρίγωνο, κάθε εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από τις αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες.

5) Δεν υπάρχει τρίγωνο με 2 ορθές

6) Δύο ευθείες που είναι κάθετες σε μία τρίτη είναι μεταξύ τους παράλληλες.

7) Αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη: Οι αντίστοιχες γωνίες να είναι ίσες  $\Rightarrow$  Οι ευθείες είναι  $\parallel$ .

8) Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών δεν ξεπερνά τις δύο ορθές

9) Από σημείο  $A$ , εκτός ευθείας  $l$  διέρχεται μία ακριβώς ευθεία να είναι κάθετη στην  $l$

10) Από σημείο  $A$ , εκτός ευθείας  $l$  διέρχεται μία ακριβώς ευθεία να είναι  $\parallel$  στην  $l$ .